Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: 10 1 [illegible] | Naam docent: Martens

I a) 6

- als $curl(F) = 0$ dan is $\int_c F\cdot ds$ (met c gesloten) gelijk aan 0.
~~...~~ bewijs: er is een oppervlakte S met $\partial S = c$, en dan geldt ~~...~~: $\int_{\partial S} F\cdot ds = \iint_S curl(F)\, dS = 0$

- als $\int_c F\cdot ds = 0$ voor alle gesloten c, dan geldt $\int_{c_1} F\cdot ds = \int_{c_2} F\cdot ds$ waarbij c_1, c_2 gelijke begin en eindpunten hebben

bewijs: neem c_2' voor c_2 in tegengestelde richting. dan is $c = c_1 \cup c_2'$ gesloten en dus is $\int_c F\cdot ds = 0$

$\int_{c_1} F\cdot ds + \int_{c_2'} F\cdot ds = \int_c F\cdot ds = 0$

$\Rightarrow \int_{c_1} F\cdot ds = -\int_{c_2'} F\cdot ds = \int_{c_2} F\cdot ds$ (tegengestelde richting $\Rightarrow -$)

- als $\int_{c_1} F\cdot ds = \int_{c_2} F\cdot ds$ (voor alle c_1, c_2 met gelijke begin en eindpunten) dan bestaat er een f met $\nabla f = F$

bewijs: ~~...~~ alle paden c van $(0,0,0)$ naar (x,y,z) ~~...~~ hebben gelijke $\int_c F\cdot ds$

- neem eerst het pad $c_1: (0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$

$f_1 = \int_{c_1} F\cdot ds = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,z)\,dt$

~~...~~ hier voor geldt $\frac{\partial f_1}{\partial z} = F_3(x,y,z)$

nu het pad $c_2: (0,0,0) \to (0,0,z) \to (0,y,z) \to (x,y,z)$

$f_2 = \int_{c_2} F\cdot ds = \int_0^z F_3(0,0,t)\,dt + \int_0^y F_2(0,t,z)\,dt + \int_0^x F_1(t,y,z)\,dt$

hier voor geldt $\frac{\partial f_2}{\partial x} = F_1(x,y,z)$

nu het pad $c_3: (0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,0,z) \to (x,y,z)$

$f_3 = \int_{c_3} F\cdot ds = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,0,t)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,z)\,dt$

hier voor geldt: $\frac{\partial f_3}{\partial y} = F_2(x,y,z)$

maar $f_1 = f_2 = f_3$ want het zijn integralen over paden met dezelfde begin en eindpunten

dit is dus de gezochte functie, want $\nabla f_1 = F$

bewezen:

$\mathrm{curl}(F) = 0 \Rightarrow \int_C F \cdot ds = 0$ (met gesloten c) $\Rightarrow \int_{c_1} F \cdot ds = \int_{c_2} F \cdot ds$ (met c_1, c_2 zelfde begin/eindpunt) $\Rightarrow \exists f : \nabla f = F$

dus $\mathrm{curl}(F) = 0 \Rightarrow \exists f : \nabla f = F$

---

6 primitieve v.d. y-component: $f = yz\sin x$

dit differentiëren naar x, y, z:

4 $\frac{\partial f}{\partial x} = yz\cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z\cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y\sin x$

$\Rightarrow \nabla f = F$

dus dit is de gezochte f

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent: Martens

8/8. II a
4

$\nabla f = \lambda \nabla g$ en $g = 0$ oplossen

$2x = \lambda 2x$
$-1 = \lambda 2y$
$x^2+y^2-1=0$

$x=0 \Rightarrow y^2=1$ — $y=1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$; $y=-1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

kandidaten voor extrema:
$x=0 \quad y=1 \quad \lambda = -\frac{1}{2}$
$x=0 \quad y=-1 \quad \lambda = \frac{1}{2}$
$x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y=-\frac{1}{2} \quad \lambda = 1$
$x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y=-\frac{1}{2} \quad \lambda = 1$

b

$u = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \end{pmatrix}$ $\quad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Hg = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$D = u^t (Hf - \lambda Hg) u$
$= (2y \;\; -2x) \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \end{pmatrix} = (2y \;\; -2x) \begin{pmatrix} 2y(2-2\lambda) \\ 4\lambda x \end{pmatrix}$

$= 4y^2(2-2\lambda) - 8\lambda x^2$

kandidaat 1 : $x=0 \quad y=1 \quad \lambda=-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow D = 12 > 0 \Rightarrow$ lokaal minimum
kandidaat 2: $x=0 \quad y=-1 \quad \lambda = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow D = 4 > 0 \Rightarrow$ lokaal minimum
kandidaat 3: $x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y=-\frac{1}{2} \quad \lambda = 1$
$\Rightarrow D = -6 < 0 \Rightarrow$ lokaal maximum
kandidaat 4: $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = -\frac{1}{2} \quad \lambda = 1$
$\Rightarrow D = -6 < 0 \Rightarrow$ lokaal maximum

Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: 10-11-08 | Naam docent: Martens

III 6/6

$$\text{curl}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2xyze^{-x^2} \\ ze^{-x^2} \\ ye^{-x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C is een gesloten pad, en curl(F) = 0

dus F is een conservatief vectorveld en dus

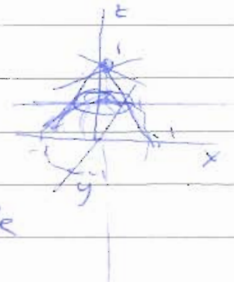
$$\int_C F \cdot ds = 0$$

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent: Martens

IV

$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

voor $z \in [0,1]$ is dit de kegel
voor $z \leq \frac{1}{2}$ gaat de bovenste helft eraf. Het is dus een open gedeelte van een halve kegel.



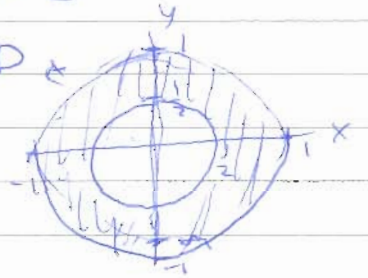
a parametrisering : grafiek

3

$\Phi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

$x \in [\quad , \quad]$
$y \in [\quad ; \quad]$??
$z \in [\quad , \quad]$

$\Phi : D \to S$
met D : (x,y)
$\frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$



b oppervlakte S:

4

$\iint_D |T_x \times T_y| \, dx\,dy$

$T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \qquad T_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

$T_x \times T_y = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$

$|T_x \times T_y| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ oppervlakte $= \iint_D \sqrt{2} \, dx\,dy = \sqrt{2} \cdot$ (oppervlakte D)

opp. $D = (\pi \cdot 1^2) - \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi$

oppervlakte $S = \frac{3}{4}\pi\sqrt{2}$

c
4

$$\vec{n} = \frac{(T_x \times T_y)}{|T_x \times T_y|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ in $\left(\frac{3}{8}\sqrt{2}, \frac{3}{8}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\frac{3}{8}\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{9}{16}}} \\ \frac{\frac{3}{8}\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{9}{16}}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

verelyeny raakulak:

$$n \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-\frac{3}{8}\sqrt{2} \\ y-\frac{3}{8}\sqrt{2} \\ z-\frac{1}{4} \end{pmatrix} = 0$$